■ ■ ■

I. Équations linéaires du premier ordre

Exercice 1. (✍) Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' = y + 1$.
2. $y' = 3y + \mathrm{e}^{3x}$.
3. $y' = 2y + \mathrm{e}^{2x}(1+x)$.
4. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$.
5. $y' = -y + x\,\mathrm{e}^{x}$.
6. $y' = 2y + 2x^2 - 1$.
7. $y' - 2y = \cos x + 2\sin x$.
8. $y' = \frac{y}{x^2}$.
9. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1+3x^2}{1+x^2}$.
10. $y' + \tan(x)y = \sin(2x)$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
11. $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = (x^2+1)\cos(x)$.
12. $y' - (\ln x)y = x^x$.

Exercice 2. (Recollement de solutions) Résoudre l'équation différentielle : $(1-x^2)y' + xy = \frac{1}{x} + x\ln(x) - x$.

1. Sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
2. Sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Exercice 3. (Équation intégrale) Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_0^x f(t)(2x-3t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}$.

II. Équations linéaires du second ordre

Exercice 4. (✍) Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 3y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{3x}$.
2. $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{x}$.
3. $y'' - 3y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{x}$.
4. $y'' + 4y' + 4y = 2$.
5. $y'' + 2y' + 2y = x^2 + 2$.
6. $y'' - 2y' + y = x\,\mathrm{e}^{x}$.
7. $y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}(x^2+1)$.
8. $y'' - 2y' + 5y = 2\cos x$.
9. $y'' + y = \cos^2 x$.
10. $y'' + y' - 2y = \cos x + \cosh x$.
11. $y'' - 2y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{x}\sin x$.
12. $y'' + y' + y = x\,\mathrm{e}^{x}$.
13. $y'' + y = |x| + 1$.

Exercice 5. (Changement de variable) On cherche à résoudre l'équation différentielle
$$(1+x)y'' - y' - xy = 0.$$

1. Montrer que $x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ est solution.
2. Soit y une solution de l'équation différentielle. Déterminer les fonctions $z\ :\ x \mapsto y(x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
3. Conclure.